DS n°3 : Complexes, Applications, Fonctions usuelles, Intégration, ED – Corrigé

Noté sur 110 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/95.

/16 **Exercice 1 : Équations différentielles**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

/7 **1)** Résoudre sur $]0,+\infty[$ le problème suivant : $\begin{cases} xy'+y=e^{-x} \\ y(1)=0 \end{cases}$

L'intervalle d'étude est $\mathbb{R}_+^*$. Résolvons $xy'+y=e^{-x}$, qui se réécrit

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{e^{-x}}{x}$$

Les solutions de l'équation homogène sont

$$y_H(x)=Ce^{-\ln x}=\frac{C}{x} \qquad \text{avec } C\in\mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière. Par la variation de la constante, on pose :

$$y_p(x)=\frac{C(x)}{x}$$

En injectant dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} & y_p'+\frac{1}{x}y_p=\frac{e^{-x}}{x} \\ \iff & \frac{C'(x)}{x}=\frac{e^{-x}}{x} \\ \iff & C'(x)=e^{-x} \end{aligned}$$

On remarque que $C(x)=-e^{-x}$ convient. On en déduit que

$$y_p(x)=-\frac{e^{-x}}{x}$$

est solution particulière. Ainsi, les solutions de $xy'+y=e^{-x}$ sont les fonctions

$$y(x)=-\frac{e^{-x}}{x}+\frac{C}{x} \qquad \text{avec } C\in\mathbb{R}$$

Déterminons C pour que $y(1)=0$.

$$\begin{aligned} y(1)=0 &\iff -e^{-1}+C=0 \\ &\iff C=e^{-1} \end{aligned}$$

Finalement, l'unique solution du problème de Cauchy est

$$\boxed{y(x)=\frac{1}{x}\left(e^{-1}-e^{-x}\right)}$$

2) On cherche à résoudre l'équation $(x\ln x)y'-y=\frac{2}{x}(\ln x+1)$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

/4 **a)** Résoudre l'équation homogène associée.

L'intervalle d'étude est $]1,+\infty[$. Comme $x\ln x$ ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$, l'équation se réécrit

$$y'-\frac{1}{x\ln x}y=\frac{2}{x^2\ln x}(\ln x+1)$$

Résolvons l'équation homogène $y'-\frac{1}{x\ln x}y=0$. Or, une primitive de $x\mapsto -\frac{1}{x\ln x}$ est $-\ln(|\ln x|)$. Ainsi, comme $\ln x>0$ (car $x>1$), les solutions sont les fonctions de la forme

$$y_H(x)=Ce^{\ln(\ln x)}=C\ln x \qquad \text{avec } C\in\mathbb{R}$$

/4 **b)** Chercher une solution particulière de la forme $x\mapsto Cx^\alpha$ avec $C,\alpha\in\mathbb{R}$ à déterminer.

On pose $y_p(x)=Cx^\alpha$ avec $C,\alpha\in\mathbb{R}$. Avec la convention $0^0=1$:

$$y_p'(x)=\alpha Cx^{\alpha-1}$$

En injectant dans l'équation, on trouve :

$$\begin{aligned} & (x\ln x)\alpha Cx^{\alpha-1}-Cx^\alpha=\frac{2}{x}(\ln x+1) \\ \iff & Cx^\alpha(\alpha\ln x-1)=\frac{2}{x}(\ln x+1) \end{aligned}$$

On remarque que $\alpha = -1$ et $C = -2$ conviennent. Ainsi

$$\boxed{y_p(x) = -\frac{2}{x}}$$

est solution particulière de l'équation.

/1 **c)** Conclure.

Finalement, y est solution de $(x \ln x)y' - y = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$ si et seulement si

$$y(x) = -\frac{2}{x} + C \ln x \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

/16 Exercice 2 : Intégrales et complexes

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

/5 **1)** Par une intégration par parties, calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x dx &= [x \arccos x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} - \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\pi}{6} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} + \sqrt{1} \\
&= \boxed{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}
\end{aligned}$$

/6 **2)** Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{ix} - e^{i5x}}{e^{ix} + e^{i5x}} dx$

Il y avait une erreur d'énoncé : l'intégrale était a priori mal définie car $e^{ix} + e^{i5x} = 0$ lorsque $x = \frac{\pi}{4}$. Voici néanmoins jusqu'où on pouvait arriver :

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{ix} - e^{i5x}}{e^{ix} + e^{i5x}} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{i3x}\left(e^{-2ix} - e^{2ix}\right)}{e^{i3x}\left(e^{-2ix} + e^{2ix}\right)} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2i \sin(2x)}{2\cos(2x)} dx \\
&= -\frac{1}{2} i \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \times \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} dx \\
&= -\frac{i}{2} \left[-\ln|\cos(2x)|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

ce qui donnait $\ln\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$, donc $\ln 0$: c'est absurde.

/5 **3)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = -4(1+i)$.

On a $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
z^5 &= -4(1+i) \\
&= -4\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\
&= e^{i\pi} \sqrt{2}^5 e^{i\frac{\pi}{4}} \\
&= \sqrt{2}^5 e^{i\frac{5\pi}{4}}
\end{aligned}$$

On cherche donc les racines cinquièmes de $\sqrt{2}^5 e^{i\frac{5\pi}{4}}$:

$$S = \left\{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{2i\frac{\pi}{5}}, \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{4i\frac{\pi}{5}}, \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{6i\frac{\pi}{5}}, \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{8i\frac{\pi}{5}}\right\}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{S = \left\{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2} e^{i\frac{13\pi}{20}}, \sqrt{2} e^{i\frac{17\pi}{20}}, \sqrt{2} e^{i\frac{21\pi}{20}}, \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\}}$$

/21 **Exercice 3 : Application complexe**

On note $E = \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et on considère la fonction $f : E \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{\overline{z}+1}{z-1}$.

/4 **1)** Montrer que pour tout $z \in E$, $f(z) \neq 1$.

Soit $z \in E$. Résolvons l'équation d'inconnue $f(z) = 1$.

$$\begin{aligned} f(z) = 1 &\iff \overline{z}+1 = z-1 \\ &\iff 2 = z - \overline{z} \\ &\iff 2 = 2i\mathrm{Im}\, z \\ &\iff 1 - i\mathrm{Im}\, z = 0 \end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on trouve $\begin{cases} 1 = 0 \\ \mathrm{Im}\, z = 0 \end{cases}$ ce qui est impossible. Ainsi l'équation $f(z) = 1$ n'admet pas de solution dans E. On en déduit que pour tout $z \in E$, $f(z) \neq 1$.

/4 **2)** Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$.

On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(ix) = \frac{-ix+1}{ix-1} = -1$$

Ainsi, $f(i\mathbb{R}) = \{f(ix) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{-1\}$.

/3,5 **3)** f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Par la question 1, f n'est pas surjective car 1 n'admet pas d'antécédent par f.
Par la question 2, f n'est pas injective car $f(i) = -1 = f(2i)$ alors que $i \neq 2i$.
Ainsi, f n'est pas injective, n'est pas surjective, et donc n'est pas bijective.

/9,5 **4)** Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \setminus \{1\}$.

Soit $z \in E$.

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff f(z) \in \mathbb{R} \\ &\iff f(z) = \overline{f(z)} \\ &\iff \frac{\overline{z}+1}{z-1} = \overline{\frac{\overline{z}+1}{z-1}} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff \frac{\overline{z}+1}{z-1} = \frac{z+1}{\overline{z}-1} \\ &\iff \overline{z}^2 - 1 = z^2 - 1 \\ &\iff z^2 = \overline{z}^2 \\ &\iff z^2 - \overline{z}^2 = 0 \\ &\iff (z-\overline{z})(z+\overline{z}) = 0 \\ &\iff z = \overline{z} \text{ ou } z = -\overline{z} \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que $f^{-1}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \setminus \{1\}$.

/37 **Problème : Primitives réciproques**

On note $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x \frac{1}{\cos t}dt \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch} t}dt \end{aligned}$$

/4 **1)** Justifier que f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.

Commençons par f. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\cos t}$ est définie sur I et continue par quotient de fonctions continues. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction f est l'unique primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\cos t}$ sur I qui s'annule en 0. Ainsi, f est dérivable et

$$\forall x \in I \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Le même argument s'applique à la fonction g. Ainsi g est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch} x}$$

2) Justifier que pour tout $t \in I$, on a

$$\cos t = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

/3

Comme $t \in I$, $\frac{t}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ donc $\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ a un sens.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} &= \frac{1-\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}} \\
&= \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(2\times\frac{t}{2}\right)}{1} = \cos t
\end{aligned}$$

3) À l'aide du changement de variables $u = \tan\frac{t}{2}$, montrer que :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \ln\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)$$

/5

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \frac{1}{\cos t}dt \\
&= \int_0^x \frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt \qquad \text{par la q. 2} \\
&= \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{1+u^2}{1-u^2}\times\frac{2du}{1+u^2} \qquad \begin{cases} u = \tan\frac{t}{2} \\ du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt \\ dt = \frac{2}{1+u^2}du \end{cases} \\
&= \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{2}{(1-u)(1+u)}du \\
&= \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du \\
&= \left[-\ln|1-u|+\ln|1+u|\right]_0^{\tan\frac{x}{2}} \\
&= -\ln\left|1-\tan\frac{x}{2}\right| + \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|
\end{aligned}$$

Or, $x \in I$, donc $-\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$. Comme tan est strictement croissante sur I, on en déduit que

$$-1 < \tan\frac{x}{2} < 1$$

En particulier, $1-\tan\frac{x}{2}$ et $1+\tan\frac{x}{2}$ sont strictement positifs. Finalement,

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\ln\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)+\ln\left(1+\tan\frac{x}{2}\right) \\
&= \boxed{\ln\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)}
\end{aligned}$$

4) (Facultatif) Si vous n'avez pas répondu à la question 1, utilisez le résultat de la question précédente pour le faire (pour la fonction f uniquement).

/2,5

/4

5) En déduire que : $\quad \forall x \in I \qquad f'(x) = \operatorname{ch}(f(x))$

Par la question 1, on a

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}$$

De plus, par la question 3,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(f(x)) &= \frac{e^{f(x)}+\frac{1}{e^{f(x)}}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}+\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right) \qquad \text{par la q. 3} \\
&= \frac{1}{2}\times\left(\frac{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2+\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)^2}{\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\times\left(\frac{2+2\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\cos x} \qquad \text{par la question 2} \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

/8 **6)** En déduire que : $\forall x \in I \qquad (g \circ f)(x) = x$

Par la question précédente et la question 1, pour tout $x \in I$, on a

$$g'(f(x)) = \frac{1}{\mathrm{ch}(f(x))} = \frac{1}{f'(x)}$$

Ainsi,

$$f'(x) \times g'(f(x)) = 1$$

ou encore (puisque $g \circ f$ est dérivable par composée),

$$(g \circ f)'(x) = 1$$

Comme I est un intervalle, on en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$(g \circ f)(x) = x + C$$

Montrons que $C = 0$. On remarque que

$$f(0) = \int_0^0 \frac{1}{\cos t} dt = 0$$

et donc

$$(g \circ f)(0) = \int_0^0 \frac{1}{\mathrm{ch} t} dt = 0$$

Ainsi, $(g \circ f)(0) = 0 = 0 + C$, si bien que $C = 0$. Finalement,

$$\forall x \in I \qquad (g \circ f)(x) = x$$

/6 **7)** Pour tout $y \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de $g(y)$. Vérifier que $g(y) \in I$.

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_0^y \frac{dt}{\frac{e^t + e^{-t}}{2}} = 2\int_0^y \frac{e^t}{e^{2t}+1} dt \\ &= 2\int_1^{e^y} \frac{1}{u^2+1} du \qquad \begin{cases} u = e^t \\ du = e^t dt \end{cases} \\ &= 2\left[\arctan u\right]_1^{e^y} \\ &= \boxed{2\arctan(e^y) - \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Vérifions que $g(y) \in I$. Comme $e^y > 0$ on a $0 < \arctan(e^y) < \frac{\pi}{2}$, si bien que

$$2 \times 0 - \frac{\pi}{2} < 2\arctan(e^y) - \frac{\pi}{2} < 2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

ou encore $g(y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[= I$.

8) Déduire des questions précédentes que :

$$\forall x \in I \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad \left(y = \int_0^x \frac{dt}{\cos t}\right) \iff \left(x = \int_0^y \frac{dt}{\mathrm{ch} t}\right)$$

/9

Soit $x \in I$ et $y \in \mathbb{R}$. On remarque qu'il s'agit de montrer que

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

Cela revient à montrer que f et g sont réciproques l'une de l'autre. Par la question 6, on a déjà $g \circ f = \mathrm{id}_I$. Ainsi, pour conclure, il suffit de vérifier que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

La fonction $f \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions et

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(y) &= f'(g(y)) \times g'(y) \\ &= \frac{1}{\cos g(y)} \times \frac{1}{\mathrm{ch} y} \\ &= \frac{1}{\cos\left(2\arctan e^y - \frac{\pi}{2}\right)} \times \frac{1}{\mathrm{ch} y} \\ &= \frac{1}{\sin(2\arctan e^y)} \times \frac{1}{\mathrm{ch} y} \\ &= \frac{1}{\frac{2\tan(\arctan e^y)}{1+\tan^2(\arctan e^y)}} \times \frac{1}{\frac{e^y+e^{-y}}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{2e^y}{1+e^{2y}}} \times \frac{2}{e^y + e^{-y}} \\ &= \frac{1+e^{2y}}{2e^y} \times \frac{2e^y}{e^{2y}+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall z \in \mathbb{R} \qquad (f \circ g)(z) = z + C$. En évaluant en 0, on trouve $(f \circ g)(0) = 0 = C$. Finalement, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. On a donc bien montré l'assertion voulue.

/18 **Exercice 4 : La fonction arccotangente**

On rappelle que la fonction cotangente est définie par

$$\cot : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$$

/5 **1)** Montrer que cot est une bijection de $]0, \pi[$ sur un intervalle I qu'on précisera. Dans la suite, on notera arccot : $I \to]0, \pi[$ sa bijection réciproque.

Étudions les variations de cot sur $]0, \pi[$. La fonction cot est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et pour tout $x \in]0, \pi[$,

$$\cot'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$$

Ainsi, cot est strictement décroissante. Comme cot est continue (car dérivable) sur l'intervalle I, par le théorème de la bijection monotone, c'est une bijection de $]0, \pi[$ sur l'intervalle $I = \cot(]0, \pi[)$. Déterminons I. Le tableau de variations donne :

x	0 $\qquad$ π
$\cot'$	$-$
$\cot$	$\searrow$

Calculons les limites en 0 et en π : $\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\sin x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^+$ donc $\cot(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$. De même, $\cot(x) \xrightarrow[x \to \pi]{} -\infty$. Ainsi, on lit sur le tableau de variations que $\boxed{I = \mathbb{R}}$. Finalement, cot est une bijection de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$.

/6 **2)** Montrer que la fonction arccot est dérivable sur I et calculer sa dérivée. On simplifiera l'expression de la dérivée en faisant disparaitre toute fonction trigonométrique.

Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction arccot est dérivable en y si et seulement si $\cot'(\mathrm{arccot}(y)) \neq 0$, c'est-à-dire $-\frac{1}{\sin^2(\mathrm{arccot}(y))} \neq 0$ ce qui est trivialement vrai. Ainsi, arccot est dérivable en y et

$$\begin{aligned}
\mathrm{arccot}'(y) &= \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2(\mathrm{arccot}(y))}} \\
&= -\sin^2(\mathrm{arccot}(y)) \\
&= -\frac{1}{1+\cot^2(\mathrm{arccot} y)} \\
&= -\frac{1}{1+y^2}
\end{aligned}$$

/7 **3)** Montrer que pour tout $x \in I$, avec x non nul, on a $\mathrm{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan x$.

On pose $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \mathrm{arccot}\frac{1}{x}$. f est dérivable par composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{arccot}'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2+1} = \arctan'(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, par primitivation, sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, il existe une constante réelle C telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan x + C$$

En évaluant en 1, on trouve que

$$\mathrm{arcot}\,(1) = \frac{\pi}{4} + C$$

Or,

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1$$

donc $\mathrm{arccot}(1) = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que $C = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$. Il en ressort que $\mathrm{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan x$ pour tout réel $x > 0$. On montre de même que cela est vrai pour tout $x < 0$ en évaluant en $-\frac{\pi}{4}$ (ou en utilisant le fait que arctan et $x \mapsto \mathrm{arccot}\left(\frac{1}{x}\right)$ sont impaires).